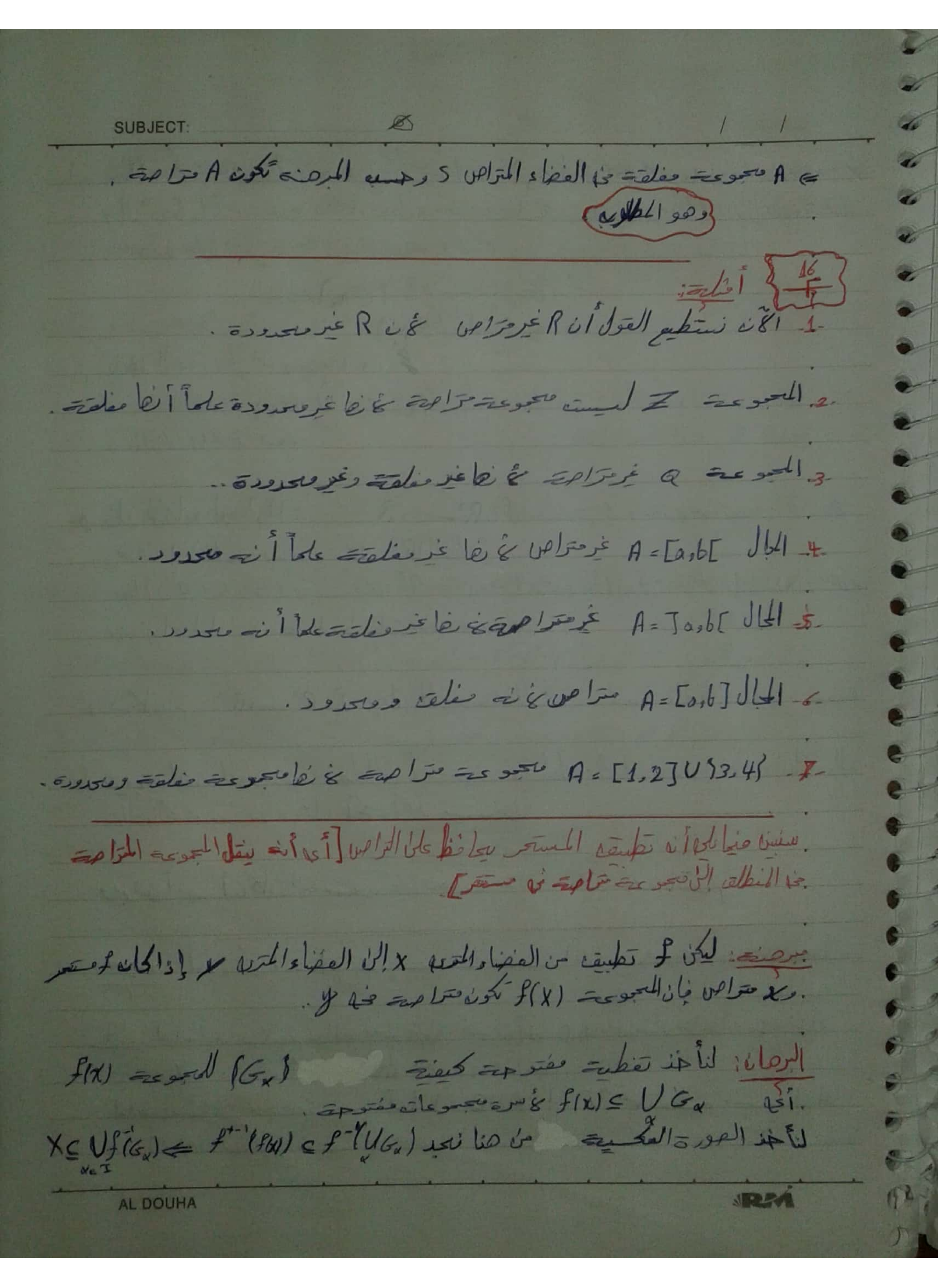




$\Leftarrow$ A مجموعة مغلقة في الفضاء المتراص S وحسب المبرهنة تكون A متراصة.

وهو المطلوب

16/4

**أمثلة:**

1- الآن نستطيع القول أن $\mathbb{R}$ غير متراص لأن $\mathbb{R}$ غير محدودة.

2. المجموعة $\mathbb{Z}$ ليست مجموعة متراصة لأنها غير محدودة علماً أنها مغلقة.

3. المجموعة $\mathbb{Q}$ غير متراصة لأنها غير مغلقة وغير محدودة..

4. المجال $A=[a,b[$ غير متراص لأنها غير مغلقة علماً أنه محدود.

5. المجال $A=]a,b[$ غير متراصة لأنها غير مغلقة علماً أنه محدود.

6. المجال $A=[a,b]$ متراص لأنه مغلق ومحدود.

7. $A=[1,2]\cup\{3,4\}$ مجموعة متراصة لأنها مجموعة مغلقة ومحدودة.

سنبين فيما يلي أن التطبيق المستمر يحافظ على التراص [أي أنه ينقل المجموعة المتراصة من المنطلق إلى مجموعة متراصة في المستقر].

**مبرهنة:** ليكن $f$ تطبيق من الفضاء المتري $X$ إلى الفضاء المتري $Y$ إذا كان $f$ مستمر و$X$ متراص فإن المجموعة $f(X)$ تكون متراصة في $Y$.

**البرهان:** لنأخذ تغطية مفتوحة كيفية $\{G_\alpha\}$ للمجموعة $f(X)$

أي: $f(X) \subseteq \bigcup G_\alpha$ حيث أسرة مجموعات مفتوحة.

لنأخذ الصورة العكسية من هنا نجد $f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_\alpha G_\alpha) \Rightarrow X \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(G_\alpha)$

SUBJECT:

.بما أن $f$ مستمر فإن جميع المجموعات $f^{-1}(G_\alpha)$ هي مجموعات مفتوحة في $X$
وبالتالي فإن الأسرة هذه تشكل تغطية مفتوحة لـ $X$ وبما أن $X$ متراص فإن هذه تغطية
.تحتوي على تغطية جزئية منتهية ولتكن :

$$f^{-1}(G_{\alpha_1}) \ldots f^{-1}(G_{\alpha_n})$$

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i})$$

.بأخذ الصورة المباشرة ينتج أنه :

$$f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

.بالتالي $f(X)$ متراصة.

★ مثلاً لو كان لدينا دالة $f: R^n \to R$ ؛ $f$ مستمرة
.بفرض $A$ مغلقة ومحدودة في $R^n$ (المنطلق)
.بما أن $A$ مغلقة ومحدودة في $R^n$ فهي متراصة وبما أن $f$ مستمر فإن $f(A)$ متراصة
في فضاء إقليدي ⇐ إنها مغلقة ومحدودة.

★ .بشكل عام $f: R^n \to R^m$ ينقل المجموعة المغلقة والمحدودة إلى مغلقة ومحدودة.

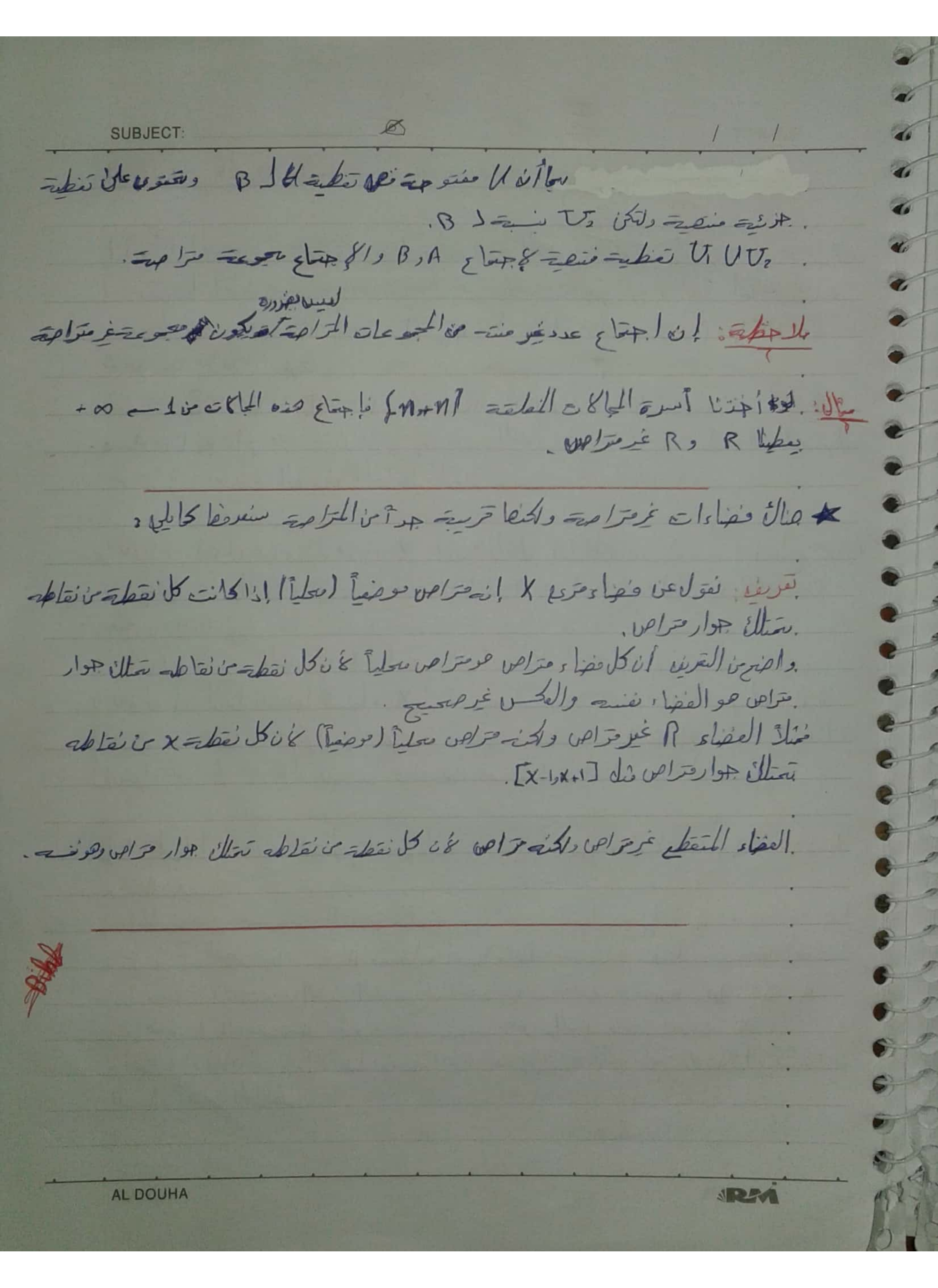
★ نتيجة لهذه المبرهنة نصل إلى أمر معروف في تحليل وهو أن أي دالة مستمرة على مجال
مغلق تكون محدودة وتبلغ أكبر وأصغر قيمة لها.

ويبرهن أيضاً أن كل دالة مستمرة على مجموعة متراصة تكون مستمرة بانتظام.

---

تمرين: أثبت أن إجتماع عدد منتهٍ من المجموعات المتراصة هو مجموعة متراصة؟

الحل: للسهولة سنأخذ حالة مجموعتين لنفرض أن $A, B$ مجموعتان متراصتان في فضاء
.متري $X$ . سنثبت أن $A \cup B$ مجموعة متراصة.
.لنأخذ تغطية مفتوحة كيفية $U$ لـ $A \cup B$ إن $U$ هي تغطية مفتوحة لـ $A$
.وبما أن $A$ متراصة فإن تغطية $U$ تحتوي على تغطية جزئية منتهية ولتكن $U_1$ نسبة لـ $A$





بما أن U مفتوحة فهي تغطية لـ B وتحتوي على تغطية جزئية منتهية ولتكن $U_2$ بالنسبة لـ B.

$U_1 \cup U_2$ تغطية منتهية لاجتماع A, B والاجتماع مجموعة متراصة.

ملاحظة: إن اجتماع عدد غير منته من المجموعات المتراصة [ليس بالضرورة] يكون مجموعة غير متراصة

مثال: لو أخذنا أسرة المجالات المغلقة $\{[n, n+1]\}$ فاجتماع هذه المجالات من 1 ← $+\infty$ يعطينا R و R غير متراص.

★ هنالك فضاءات غير متراصة ولكنها قريبة جداً من المتراصة سنعرفها كالتالي:

تعريف: نقول عن فضاء متري X إنه متراص موضعياً (محلياً) إذا كانت كل نقطة من نقاطه تمتلك جوار متراص.

واضح من التعريف أن كل فضاء متراص هو متراص محلياً لأن كل نقطة من نقاطه تمتلك جوار متراص هو الفضاء نفسه والعكس غير صحيح.

مثلاً الفضاء R غير متراص ولكنه متراص محلياً (موضعياً) لأن كل نقطة x من نقاطه تمتلك جوار متراص مثل $[x-1, x+1]$.

الفضاء المتقطع غير متراص ولكنه متراص لأن كل نقطة من نقاطه تمتلك جوار متراص وهو نفسه.